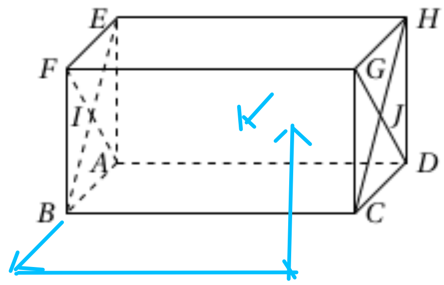
Vecteurs de l'espace
Corrigés des exemples du cours

Capacité 1 ***Prouver des égalités vectorielles***
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

1. Déterminer trois vecteurs égaux de la figure égaux au vecteur $\overrightarrow{FE}$.
2. Déterminer l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$.
3. Construire l'image K du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AG}$.
   Que peut-on dire des points H, G et K ? Justifier.



1) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GH}$

2) On a $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$ car I milieu de [FA]
De plus $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA}$
et $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD}$
car EFGH et EADH sont des parallélogrammes
donc $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{GD}$
Or J milieu de GD donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD}$

On a donc $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA})$
$\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FI}$

L'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{GJ}$ est donc le point I.

3) On a $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$
Soit K l'image du point B par la translat

le vecteur $\overrightarrow{AG}$. On a donc :

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$$

De $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AG}$ on déduit que $ABKG$ est un parallélogramme et donc que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GK}$

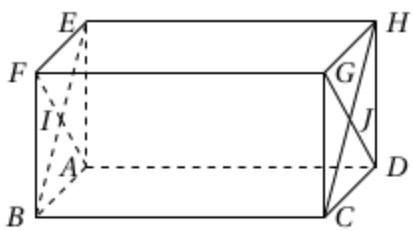
Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car $ABCD$ parallélogramme
et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$ car $HGCD$ parallélogramme
donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG}$

De $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG}$, on déduit que :
$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GK}$
et donc que G milieu de $[HK]$.
Ainsi le points G, H, K sont alignés.

Capacité 2 ***Identifier des vecteurs colinéaires, opposés, égaux***

Dans le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ de la capacité 1 :

1. Déterminer trois vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{FI}$.
2. Déterminer trois vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{FI}$.
3. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de même sens mais pas de même norme que le vecteur $\overrightarrow{FI}$.
4. Déterminer trois vecteurs colinéaires, de sens opposé mais pas de même norme que le vecteur $\overrightarrow{FI}$.



1) Trois vecteurs égaux à $\overrightarrow{FI}$:

$\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{JD}$

2) Trois vecteurs opposés à $\overrightarrow{FI}$:

$\overrightarrow{FI} = -\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{JD} = -\overrightarrow{GJ}$

3) Trois vecteurs colinéaires, de même sens mais pas de même norme que $\overrightarrow{FI}$:

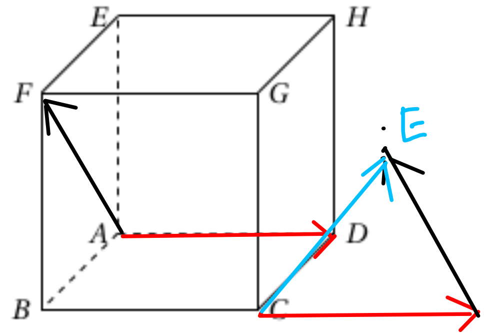
$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FI}$ et $\frac{3}{2}\overrightarrow{GD}$

4) Trois vecteurs colinéaires, de sens opposé mais pas de même norme que $\overrightarrow{FI}$:

$\overrightarrow{FA} = -2\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{GD} = -2\overrightarrow{IF}$

et $-3\overrightarrow{IF}$

Capacité 3 ***Construire une somme vectorielle***



1. Soit $ABCDEFGH$ un cube.

a. Donner un représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}$.

b. Construire un représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}$.

c. Déterminer un représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}$.

d. Justifier que $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

e. Déterminer l'image du point H par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$.

2. Soit $MNPQ$ un tétraèdre.

a. Faire une figure.

b. Recopier et compléter l'égalité : $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MP}+\ldots+\overrightarrow{QP}$

c. En déduire que $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QN}$.

1) a) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}$

b) $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{HG}$

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AG}$

d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$

e) $\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA}$

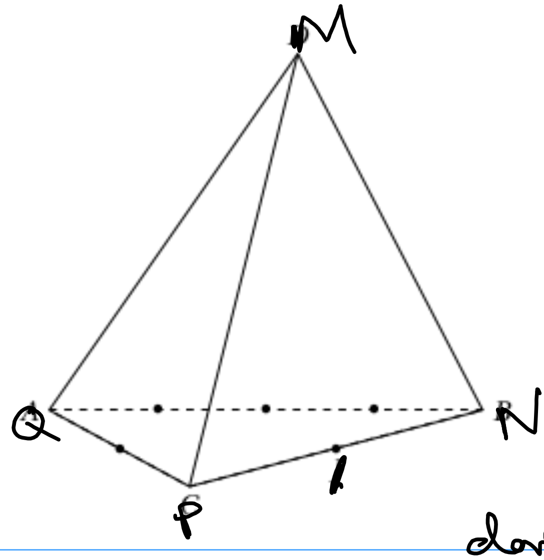
$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{HB}$

L'image du point H par la translation de vec

- terme $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$ est donc le point B

2) Soit MNPQ un tétraèdre



a)

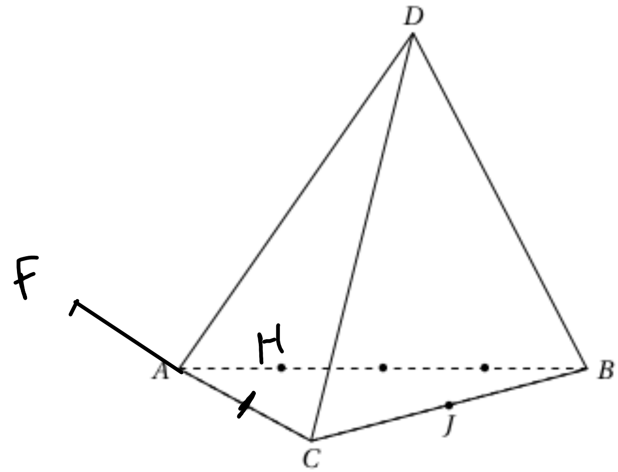
$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QP}$

b) On en déduit que :

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PN}$

donc $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QN}$

Capacité 4 ***Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme***



Soit $ABCD$ un tétraèdre. J est le milieu de $[BC]$, H et F sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

1. Compléter la figure.
2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que les points F, H et J sont alignés.

2) $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AH}$

donc $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

en effet J milieu de $[CB]$ donc $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

On a donc $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$

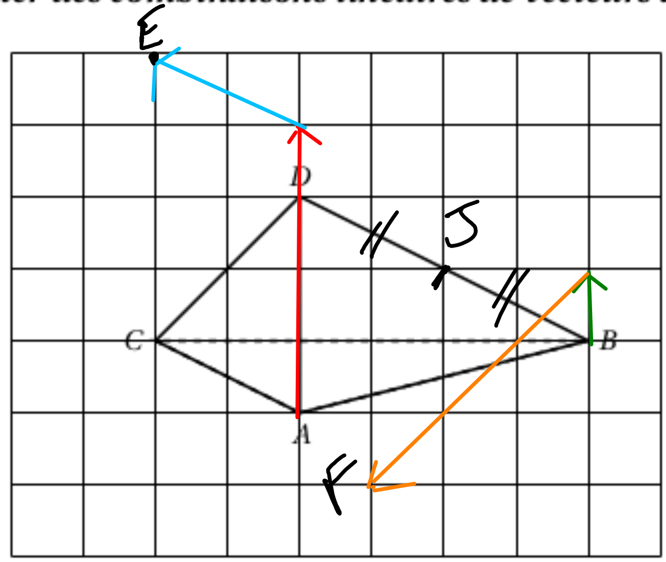
$\overrightarrow{FJ} = 3/2\,\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

donc $\vec{FJ} = \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$

On rappelle que $\vec{FH} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AB}$

On remarque que $\vec{FJ} = 2\vec{FH}$.
Les vecteurs $\vec{FJ}$ et $\vec{FH}$ sont donc colinéaires et comme ils ont un point commun, les points F, J, et H sont alignés.

Capacité 5 ***Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés, voir capacité 1 p.51***



1. Construire sur la figure ci-dessus le point E défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

2. Construire sur la figure ci-dessus le point F défini par $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$.

3. Construire sur la figure ci-dessus le point J tel que $\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$.

4. On considère l'équation vectorielle $(\mathscr{E})$: $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ d'inconnue un point G.

   a. Démontrer que pour tout point G de l'espace, $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GJ}$.

   b. En déduire que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \iff \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.

   c. En déduire qu'il existe un unique point G de l'espace vérifiant l'équation $(\mathscr{E})$.

   d. Démontrer que le point G vérifiant l'équation $(\mathscr{E})$ appartient aux trois médianes du triangle BDC. On en déduit que les trois médianes du triangle BDC sont concourantes en G qui est le centre de gravité du triangle BDC.

4) a) Pour tout point G de l'espace, on a :

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JD}$$
$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}$$

Or J milieu de [BD] donc $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{0}$
On a donc : $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GJ}$

b) On en déduit que :

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$
$$\iff \overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$$

Il existe donc un unique point G vérifiant $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$, qui est l'image du point C par la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.
Ceci prouve à la fois l'existence et l'unicité de G.

d) On a déjà démontré qu'il existe un unique point G vérifiant $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ et que $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.
On en déduit que G appartient à la médiane issue de C dans le triangle CBD.

On montre de même qu'en 4) a) que si on note I le milieu de [CD] et K le milieu de [BC] alors :

$$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GI} \text{ et } \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GK}$$

Puis en substituant dans $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

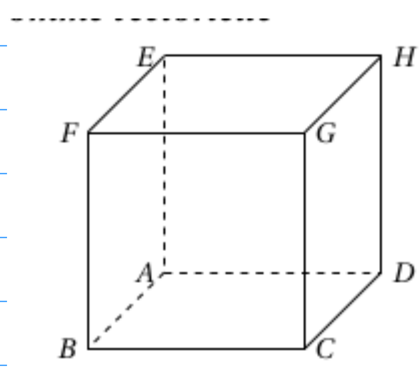
on obtient d'une part que :
$\vec{DG} = \frac{2}{3}\vec{DK}$ et $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BI}$

On en déduit que G appartient aux médianes (DI) et (BK).
G appartient donc aux trois médianes du triangle BCD. On en déduit d'une part que ces 3 médianes sont concourantes et d'autre part que G est leur point d'intersection appelé centre de gravité.

Capacité 6 ***Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51***

Soit $ABCDEFGH$ le cube de la capacité 3.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ peut-il s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$?



1) $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$

$\vec{BH} = \vec{BC} + \vec{CG} + \vec{GH} = \vec{AD} +$

2) On ne peut pas exprimer $\vec{AE}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$, car les points

A, B, D et E n'appartiennent pas à un même plan et donc il n'existe pas de réels x et y tels que : $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AE}$.

On dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont linéairement indépendants ou non coplanaires.

Capacité 7 ***Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs, voir capacité 2 p.51***

Soit $ABCD$ un tétraèdre. I est le milieu de $[CD]$, J celui de $[AI]$, M et H sont définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ comme combinaisons linéaires de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire que les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

1) $\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

Or I milieu de $[CD]$ donc $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$
$= 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{AI}$

donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Ainsi $\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$$
$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$$

En effet $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$ car J milieu de $[AI]$

De plus $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

donc $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Comme $\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

, on remarque que $\overrightarrow{MH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires, donc les droites (MH) et (BJ) sont parallèles.

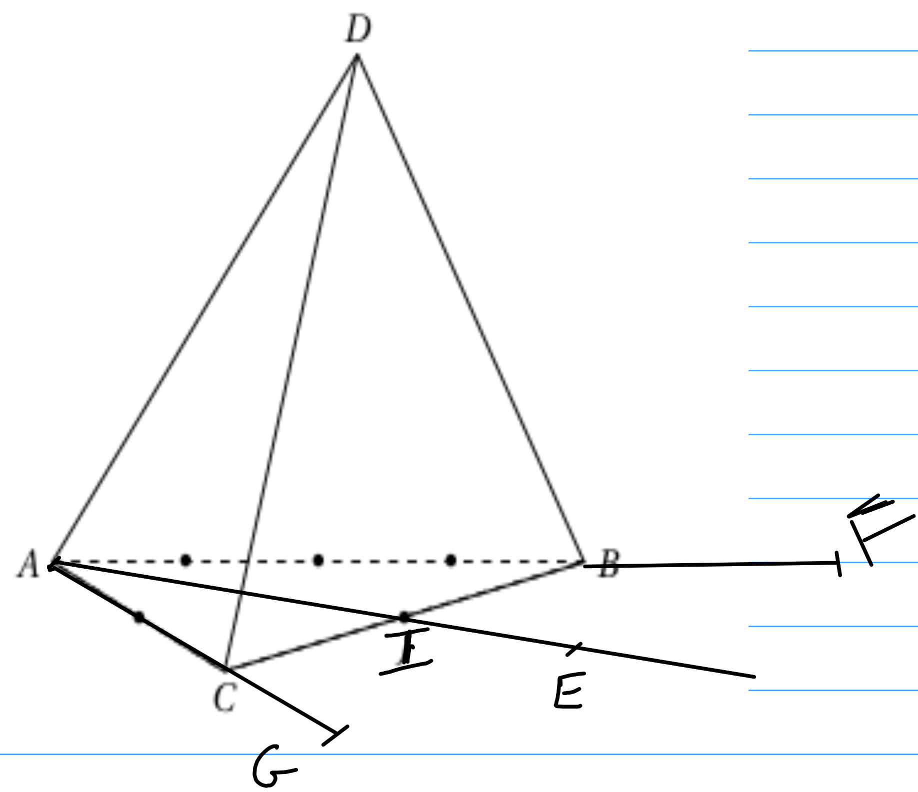
Capacité 8 ***Utiliser la colinéarité pour démontrer un alignement ou un parallélisme***

Soit $ABCD$ un tétraèdre, I le milieu de $[BC]$ et E, F et G les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI} \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

1. Faire une figure.
2. Démontrer que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$. Que peut-on en déduire pour les points F, G et E ?
3. Donner trois vecteurs directeurs de la droite (FE).

1)



2) $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IE}$

Or I milieu de [BC] donc $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

et $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

donc $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

donc $\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

Finalement, on a

$$\overrightarrow{FE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

On a démontré précédemment que

$$\overrightarrow{FG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$

On en déduit que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$

Les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires et ont une extrémité commune donc F, G, E sont alignés.

3) F, G, E alignés et distincts donc $(FG) = (FE) = (EG)$

On en déduit que $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont trois vecteurs directeurs de (FE)

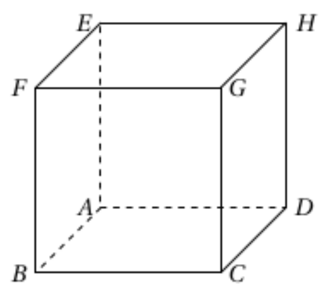
Logique 1

Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de l'espace. Les implications suivantes sont-elles vraies ?

1. (I_1) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont parallèles, alors une droite $\mathscr{D}_3$ dont un vecteur directeur est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. »
2. (I_2) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui ne sont pas colinéaires alors elles sont sécantes. »
3. (I_3) « Si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont des vecteurs directeurs colinéaires alors elles n'ont pas de point commun. »

1) L'implication (I_1) est vraie.
Soit $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_3$.
Puisque $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, on a $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires donc $\vec{u} = k\vec{v}$ avec k réel.
On en déduit que $\vec{w} = kx\vec{v} + y\vec{v}$
et donc $\vec{w} = (kx+y)\vec{v}$
$\vec{w}$ est donc colinéaire à $\vec{v}$ et donc à $\vec{u}$, ainsi $\mathcal{D}_3$ est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$

2) (I_2) est fausse.
Prenons par exemple le cube ABCDEFGH, les droites (AB) et (EH) ont des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EH}$ qui ne sont pas colinéaires.



Les droites (AB) et (EH) ne sont pas parallèles. Elles ne sont pas non plus sécantes car sinon les points A, B, E et H appartiendraient au même plan, ce qui n'est pas vrai.

3) (I_3) est fausse
Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues alors <u>elles</u> ont des vecteurs directeurs colinéaires et une infinité de points communs.

Capacité 9

1. Déterminer le nombre maximal de plans (respectivement de droites) distincts qu'on peut définir à partir de quatre points de l'espace.
2. Déterminer le nombre de plans qu'on peut définir en utilisant uniquement les sommets d'un cube $ABCDEFGH$.

1) A partir de 4 points de l'espace on peut déterminer :

- pour les droites (définies par 2 points)
  4 choix pour le premier point
  3 choix pour le second point
  donc $4 \times 3 = 12$ couples (Point 1, Point 2)
  et donc $\frac{12}{2} = 6$ droites puisque les couples (Point 1, Point 2) et (Point 2, Point 1) définissent la même droite.

- pour les plans (définies par 3 points)
  4 choix pour le premier point
  3 choix pour le second point
  2 choix pour le troisième point
  donc $4 \times 3 \times 2 = 24$ triplets (Point 1, Point 2, Point 3)
  ce qui donne $\frac{24}{6} = 4$ plans car on peut constituer $3 \times 2 \times 1 = 6$ triplets à partir de 3 points.

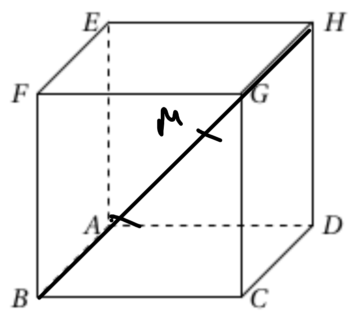
2) Avec un cube (8 sommets), on peut définir $\frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$ plans au maximum en raisonnant comme en 1)

Capacité 10 ***Démontrer que des vecteurs sont coplanaires***

Soit $ABCDEFGH$ un cube et I le milieu de $[FC]$. M est le point tel que $\overrightarrow{HM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HB}$.

1. Compléter la figure.
2. Citer trois vecteurs coplanaires avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$.
3. Citer trois vecteurs non coplanaires avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$.
4. Démontrer que $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AE}\right)$.

   En déduire que $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont coplanaires.
5. En décomposant $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ selon $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$, démontrer de même que les points A, M et I sont alignés.



1)

2) Vecteurs coplanaires avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$.

3) Vecteurs non coplanaires avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{EC}$.

4) $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{AE}$
AEFB est un carré donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$
On a donc $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$

$$\vec{FC} = \vec{FB} + \vec{BC}$$

AEFB et ABCD sont des carrés donc :

$$\vec{FB} = \vec{EA} \text{ et } \vec{BC} = \vec{AD}$$

On a donc : $\vec{FC} = \vec{EA} + \vec{AD} = \vec{AD} - \vec{AE}$

Enfin, $\vec{FM} = \vec{FH} + \vec{HM}$

$$\vec{FM} = \vec{FH} + \frac{2}{3}\vec{HB}$$

Or $\vec{FH} = \vec{FE} + \vec{EH} = \vec{BA} + \vec{AD}$

et $\vec{HB} = \vec{HD} + \vec{DB} = \vec{EA} + \vec{DA} + \vec{AB}$

On a donc : $\vec{FM} = \vec{BA} + \vec{AD} + \frac{2}{3}(\vec{EA} + \vec{DA} + \vec{AB})$

$$\vec{FM} = \vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{DA} + \frac{2}{3}\vec{EA} + \vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{AB}$$

$$\vec{FM} = \frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{2}{3}\vec{AE} - \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$\boxed{\vec{FM} = \frac{1}{3}(\vec{AD} - \vec{AB} - 2\vec{AE})}$$

Or $\vec{FA} = -\vec{AB} - \vec{AE}$ et $\vec{FC} = \vec{AD} - \vec{AE}$

donc $\boxed{\vec{FM} = \frac{1}{3}(\vec{FC} + \vec{FA})}$

On en déduit que $\vec{FA}$, $\vec{FC}$ et $\vec{FM}$ sont coplanaires.

5) I milieu de [FC]

donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AF} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{BC})$

donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}(2\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{AD})$ car $\vec{BC} = \vec{AD}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AE})$

donc $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB})$$

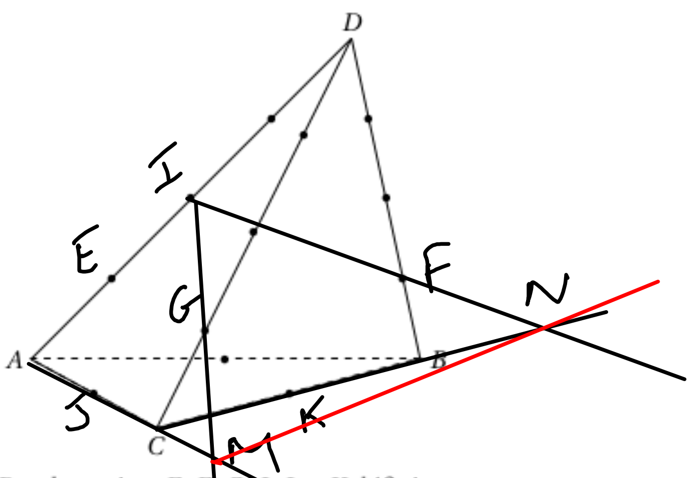
Comparons avec $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD})$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{AM}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires et ont un point en commun.
donc A, I, M sont alignés.

Capacité 11 ***Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.***



On considère un tétraèdre $ABCD$ et les points E, F, G, I, J et K définis par :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DA} \quad \overrightarrow{DF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DB} \quad \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC} \quad \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \quad \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0} \quad \overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{KC}$$

1. Compléter la figure.
2. Les droites (IG) et (JK) sont-elles sécantes ?
3. Démontrer que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.
4. Démontrer que les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.
5. Démontrer que la droite (IG) est sécante avec le plan (ABC).
6. En déduire que les plans (IGF) et (ABC) sont sécants et construire leur intersection sur la figure.

2) Hypothèse : Supposons que (IG) et (JK) sont sécantes

Conclusion : On en déduit que K appartient au plan (IGJ). Cette conclusion est en contradiction avec le contexte de l'exercice : K milieu de [BC] ne peut appartenir au plan (IGJ)

Par un raisonnement par l'absurde, on en déduit que (IG) et (JK) ne sont pas sécantes (l'hypothèse est fausse car elle aboutit à une contradiction).

4) On applique deux fois le théorème de

Thalès :

- Dans ADC, on a $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

donc $\overrightarrow{EG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

- Dans DBC, on a $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

donc $\overrightarrow{GF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

$(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EF})$ est une base du plan (EGF)
$\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont respectivement colinéaires à $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ qui forment une base du plan (ACB)

On en déduit que les plans (EGF) et (ACB) sont parallèles.

3) Dans le triangle ABD, on a :

- $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DB}$

D'après le théorème de Thalès, on a :

$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

et donc $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ colinéaires.

et donc (EF) parallèle à (AB)

5) Dans le triangle ACD, on a :
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

D'après la contraposée du théorème de Thalès on en déduit, puisque $\frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$, que (IG) et (AC) sont sécantes.
Or (AC) est une droite incluse dans le plan ABC)
On en déduit que (IG) est sécante avec le plan (ABC).

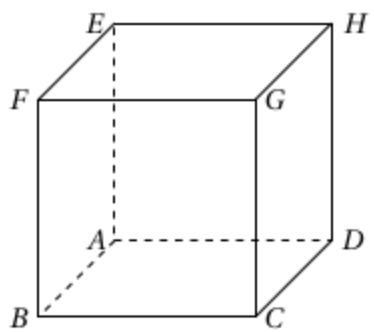
6) (IG) droite de (IGF) est sécante avec (AC) droite de (ABC)
On en déduit que (IGF) et (ABC) ont au moins un point commun
De plus I milieu de [AD] n'appartient pas au plan (ABC) car le tétraèdre n'est pas applati.

Donc (IGF) et (ABC) sécants selon une droite qui passe par l'intersection M de (IG) et (AC) et l'intersection N de (IF) et (BC)

Capacité 12 ***Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base, voir capacité 7 p.57***

Soit $ABCDEFGH$ le cube de la capacité 10.

1. Donner une base du plan (ABG).
2. Compléter cette base en une base de l'espace
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG}$ forment-ils une base de l'espace?



1) Une base du plan (ABG) est $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$

2) On peut compléter la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$ par le vecteur $\overrightarrow{AF}$ pour obtenir une base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AF})$ de l'espace. En effet, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AF}$ ne sont pas coplanaires car F n'appartient pas au plan (ABG).

3) On a $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{GC}$ donc EGCA est un parallélogramme

On en déduit que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$

Par ailleurs $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

On a donc : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EG}$

De $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EG}$ on déduit que $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas coplanaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne forment donc pas une base de l'espace

Capacité 13 ***Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base, voir capacité 8 p.57***

Soit $ABCDEFGH$ le cube de la capacité 10.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EG}$:

1. Dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
2. Dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG}\right)$.

1) On décompose dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$:

$\overrightarrow{AE} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{AE}(0;0;1)$

$\overrightarrow{AG} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{EG}(1;1;0)$

2) On décompose dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AG})$:

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AG} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

donc $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AG}$ donc $\overrightarrow{AE}(-1;-1;1)$

$\overrightarrow{AG} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AG}$ donc $\overrightarrow{AG}(0;0;1)$

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

donc $\overrightarrow{EG}(1;1;0)$

Capacité 14 ***Utiliser les règles opératoires sur les coordonnées de vecteurs***

L'espace est muni d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. Déterminer des réels x et y pour que les vecteurs $\vec{u}\,(1; x; 5)$ et $\vec{v}\,(2; -3; y)$ soient colinéaires.
2. Soit les vecteurs $\vec{r}\,(1; -2; 0)$, $\vec{s}\,(3; 1; 3)$ et $\vec{t}\,(-1; -5; -3)$.
   a. Déterminer les coordonnées du vecteur $2\vec{r} - \vec{s} - \vec{t}$.
   b. En déduire que les vecteurs $\vec{r}$, $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires.

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, donc :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires ssi il existe un réel k tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.

$$\vec{u} = k\vec{v} \iff \begin{cases} 1 = 2k \\ x = -3k \\ 5 = y \times k \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ x = -3/2 \\ y = \frac{5}{k} = 10 \end{cases}$$

2) Soit les vecteurs $\vec{r}\,(1;-2;0)$ $\vec{s}\,(3;1;3)$ et $\vec{t}\,(-1;-5;-3)$

a) $2\vec{r} - \vec{s} - \vec{t}$ a pour coordonnées :

$(2-3+1 ; -4-1+5 ; 2\times 0-3+3) = (0;0;0)$

On en déduit que $2\vec{r} - \vec{s} - \vec{t} = \vec{0}$

b) Les vecteurs $\vec{r}$, $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont donc coplanaires (ou linéairement dépendants).

Capacité 15 ***Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité). Voir la capacité 12 p.60.***

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

1. Soit les points $A(-1;3;4)$, $B(7;6;1)$ et $C(0;2;-5)$.

a. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

b. Déterminer les coordonnées du point F symétrique de D par rapport à A.

2. Les points $G(5;2;3)$, $H(-1;3;2)$ et $I(-7;4;1)$ sont-ils alignés ?

3. Démontrer que les points $J(-4;5;-1)$, $K(-1;5;-4)$, $L(-2;12;4)$ et $M(4;12;-2)$ sont coplanaires.

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A(-1;3;4)$, $B(7;6;1)$ et $C(0;2;-5)$.

- Question : Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.
- Réponse : $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
  Or $\overrightarrow{BC}(-7;-4;-6)$ et si on note $D(x;y;z)$ on a $\overrightarrow{AD}(x+1;y-3;z-4)$.
  $$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=-7 \\ y-3=-4 \\ z-4=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases}.$$

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Calculer les coordonnées du point F symétrique de D par rapport à A.
- Réponse : A milieu de $[FD]$ donc les coordonnées de $F(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifient : $\begin{cases}(x+x_D)/2=x_A\\(y+y_D)/2=y_A\\(z+z_D)/2=z_A\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=7\\z=10\end{cases}$.
  On a donc $F(x=6\,;\,y=7\,;\,z=10)$.

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$. Soient les points $A\,(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B\,(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C\,(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Les points $G\,(5\,;\,2\,;\,3)$, $H\,(-1\,;\,3\,;\,2)$ et $I\,(-7\,;\,4\,;\,1)$ sont-ils alignés ?
- Réponse : $\overrightarrow{GH}\,(-6\,;\,1\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{HI}\,(-6\,;\,1\,;\,-1)$. On remarque que $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{HI}$ donc H est le milieu de $[GI]$ et G, H et I sont alignés.

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Soient les points $A(-1\,;\,3\,;\,4)$, $B(7\,;\,6\,;\,1)$ et $C(0\,;\,2\,;\,-5)$.

- Question : Montrer que les points $J(-4\,;\,5\,;\,-1)$, $K(-1\,;\,5\,;\,-4)$, $L(-2\,;\,12\,;\,4)$ et $M(4\,;\,12\,;\,-2)$ sont coplanaires.
- Réponse : On calcule les coordonnées de trois vecteurs de même origine J : $\overrightarrow{JK}(3\,;\,0\,;\,-3)$, $\overrightarrow{JL}(2\,;\,7\,;\,5)$ et $\overrightarrow{JM}(8\,;\,7\,;\,-1)$. On remarque que $\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JL} + 2\overrightarrow{JK}$, on peut en déduire que $\overrightarrow{JM}$, $\overrightarrow{JL}$ et $\overrightarrow{JLK}$ sont coplanaires et que les points J, L, L et M appartiennent au même plan.

Capacité 16 ***Lire ou déterminer une représentation paramétrique de droite***

Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t-2 \\ y = 4 \\ z = 2t-1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer un vecteur directeur de Δ et un point de Δ.
2. Le point $M(-3\,;4\,;-3)$ appartient-il à la droite Δ ?

3. Déterminer les coordonnées de trois points de Δ.
4. Déterminer une autre représentation paramétrique de la droite Δ.

1) Un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$
Un point de Δ est $A(-2\,;4\,;-1)$

2) Soit $M(-3\,;4\,;-3)$.
M appartient à Δ si et seulement s'il existe un paramètre t tel que :

$$\begin{cases} -3 = t-2 \\ 4 = 4 \\ -1 = 2t-1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 & (E1) \\ 4 = 4 \\ t = 0 & (E2) \end{cases}$$

Les équations (E1) et (E2) sont incompatibles, donc le système n'a pas de solution et M n'appartient pas à Δ.

3) Déterminons les coordonnées de trois points de Δ :

- Pour $t = 1$ $\quad M_1 \begin{cases} x = 1-2 = -1 \\ y = 4 \\ z = 2\times 1 - 1 = 1 \end{cases}$ donc $M_1(-1\,;4\,;1)$

. Pour $t=2$, $M_2 \begin{cases} x = 2-2 \\ y = 4 \\ z = 2\times 2-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$

donc $M_2(0;4;3)$

. Pour $t=-1$, $M_{-1} \begin{cases} x=-1-2=-3 \\ y=4 \\ z=2\times(-1)-1=-3 \end{cases}$

donc $M_{-1}(-3;4;-3)$

4) On $M_1 \in \Delta$ et $M_2 \in \Delta$ et $M_1 \neq M_2$

donc $\Delta = (M_1 M_{-1})$.

Δ est donc aussi la droite passant par M_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{M_1M_{-1}}$.

On a $\overrightarrow{M_1M_{-1}}(-2;0;-4)$

Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$$\Delta \begin{cases} x = -1-2t \\ y = 4 \\ z = 1-4t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Capacité 17 ***Étudier l'intersection de deux droites de l'espace***

Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. Déterminer les coordonnées d'un point de $\mathscr{D}$ et un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
2. Le point $A(19\,;\,-11\,;\,7)$ appartient-il à $\mathscr{D}$?
3. Soient $B(3\,;\,2\,;\,-1)$ et $C(-9\,;\,7\,;\,0)$.
   Démontrer que la droite (BC) n'est pas parallèle à $\mathscr{D}$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de (BC).
5. Étudier l'intersection des droites (BC) et $\mathscr{D}$ en résolvant un système d'équations.
   Pour la méthode de résolution d'un système de trois équations à trois inconnues par substitution, voir l'exemple p. 58 du manuel Indice.

1)

Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

- Question : Déterminer les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- Réponse :

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + 0,25t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Un point de $\mathcal{D}$ est $E(4\,;\,-1\,;\,2)$ et un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}(-3\,;\,2\,;\,0,25)$.

2)

Soit $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Le point $A\,(19\,;\,-11\,;\,7)$ appartient-il à $\mathcal{D}$?
- Réponse : on résout un système d'équations :

$$\begin{cases} 19 = 4 - 3t \\ -11 = 2t - 1 \\ 7 = 2 + 0,5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = -5 \\ t = 20 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ce système n'a pas de solution, donc le point $A\,(19\,;\,-11\,;\,7)$ n'appartient à la droite $\mathcal{D}$.

3)

$\mathcal{D}$ droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ 4z = 8 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

- Soient $B\,(3\,;\,2\,;\,-1)$ et $C\,(-9\,;\,7\,;\,0)$.
  La droite (BC) est-elle parallèle à $\mathcal{D}$?
- Réponse : Un vecteur directeur de la droite (BC) est $\overrightarrow{BC}\,(-12\,;\,5\,;\,1)$. Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}\,(-3\,;\,2\,;\,0,25)$.
- (BC) et $\mathcal{D}$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{BC}$.
  $$\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -12\lambda \\ 2 = 5\lambda \\ 0,25 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25 = \lambda \\ 0,4 = \lambda \\ 0,25 = \lambda \end{cases}.$$
  Système sans solution donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.

4)

Soient $B(3;\,2;\,-1)$ et $C(-9;\,7;\,0)$.

- Représentation paramétrique de la droite (BC) ?
- Réponse : $\overrightarrow{BC}(-12;\,5;\,1)$ donc une représentation paramétrique de la droite (BC) est :
$$\begin{cases} x = 3 - 12u \\ y = 2 + 5u \\ z = -1 + u \end{cases} \quad , \; u \in \mathbb{R}$$

5)

- Question : (BC) et $\mathcal{D}$ sont-elles sécantes ?
- Réponse : On a déjà démontré que (BC) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles, donc (BC) et $\mathcal{D}$ sont soit sécantes soit non coplanaires. Il suffit de déterminer si elles ont un point d'intersection en résolvant le système d'inconnues x, y, z, t, u :
$$\begin{cases} x = 3 - 12u = 4 - 3t \\ y = 2 + 5u = 2t - 1 \\ z = -1 + u = 2 + 0,25t \end{cases}.$$
On élimine d'abord x, y et z pour résoudre en u et t par substitution :
$$\begin{cases} 3 - 12u = 4 - 3t \\ 2 + 5u = 2t - 1 \\ -1 + u = 2 + 0,25t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 36 - 3t = 4 - 3t \\ 2 + 15 + 1,25t = 2t - 1 \\ u = 3 + 0,25t \end{cases}$$

- Question : (BC) et $\mathcal{D}$ sont-elles sécantes ?
- $\left\{\begin{array}{l} 3-12u=4-3t \\ 2+5u=2t-1 \\ -1+u=2+0,25t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3-36-3t=4-3t \\ 2+15+1,25t=2t-1 \\ u=3+0,25t \end{array}\right.$

  $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -33=4 \\ 2+15+1,25t=2t-1 \\ u=3+0,25t \end{array}\right.$

  La première équation n'a pas de solution, donc le système n'a pas de solution, donc (BC) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes. Comme elles ne sont pas parallèles, elles sont donc non coplanaires.